

Jméno:

1. Je dána funkce

$$f(x, y) = 4 \cdot \sqrt{\frac{y}{x+1} - 1}.$$

- Najděte a načrtněte její definiční obor. Je $D(f)$ množina otevřená nebo uzavřená? Tvrzení odůvodněte.
- Vypočítejte $\nabla f(1, 4)$.
- Napište, co znamená, že funkce $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in M$ (M je otevřená množina) totální diferenciál.
Ukažte, že funkce f má v bodě $(1, 4)$ totální diferenciál.
- Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(1, 4, 4)$.
- Určete přibližně pomocí lineární aproximace hodnotu $f(0,98; 4,01)$.
- Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř?

(10 bodů)

- Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definována implicitně funkce $z = f(x, y)$.
Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ.

- Dokažte, že rovnicí

$$z^4 - x^3 y z^2 - x z + y^3 = 0$$

je definována implicitně v okolí bodu $(1, 1, 1)$ funkce $z = f(x, y)$.

- Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu $f(1,01; 0,99)$.
- Vypočítejte smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $(1, 1)$.

(10 bodů)

- Vysvětlete, proč existují extrémy funkce f na množině M a tyto globální extrémy najděte, je-li

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{a} \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4\}.$$

(10 bodů)